8.7 Multiplikationssatz:

Für $A, B \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ gilt:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

8.8 Korollar: Invertierbarkeitskriterium

$A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

In diesem Fall ist $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Beweis 8.8:

($\Rightarrow$) Falls A invertierbar, $\exists B$:

$$A \cdot B = \mathbb{1}_n.$$

Nach Multiplikationssatz 8.7 folgt:

$$\underbrace{\det(A)}_{\in K} \cdot \underbrace{\det(B)}_{\in K} = 1$$

Also folgt $\det(A) \neq 0$, und

$$\det(B) = \det(A)^{-1}.$$

($\Leftarrow$) Sei A nicht invertierbar.

$\exists$ invertierbare $T, S \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$

mit

$$S \cdot A \cdot T = (A \text{ in Normalform})$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline \underbrace{0}_{r} & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

mit $r = \text{Rang}(A) < n$.

A invertierbar $\Leftrightarrow$ Rang $A = n$
(Satz 6.35)

Daher ergibt sich nach Multipl.-Satz 8.7:

$$\underbrace{\det(S)}_{\neq 0} \cdot \det(A) \cdot \underbrace{\det(T)}_{\neq 0} = 0$$

oben in ($\Rightarrow$) bewiesen

Also folgt: $\det(A) = 0$ $\square$

Beweis Multiplikationssatz 8.7:

Sei $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{jk})_{jk}$, $\underline{b}_j = (b_{j1}, \dots, b_{jn})$

$$A \cdot B = \left(\sum_j a_{ij} b_{jk}\right)_{ik} = \begin{pmatrix} \sum_{j_1} a_{1j_1} \underline{b}_{j_1} \\ \vdots \\ \sum_{j_n} a_{nj_n} \underline{b}_{j_n} \end{pmatrix},$$

daher

$$\det(A \cdot B) \overset{\text{Satz 8.4, D1}}{=} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \\ j_i \in \{1, \dots, n\}}} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} \det \begin{pmatrix} \underline{b}_{j_1} \\ \vdots \\ \underline{b}_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$\overset{D2}{=} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \\ j_i \in \{1, \dots, n\}}} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} \det \begin{pmatrix} \underline{b}_{j_1} \\ \vdots \\ \underline{b}_{j_n} \end{pmatrix}$$

alle j_i verschieden

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot \det \begin{pmatrix} \underline{b}_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ \underline{b}_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \right)}_{\det A} \underbrace{\det \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_n \end{pmatrix}}_{\det B}$$

$\square$

8.9 Laplacescher Entwicklungssatz

Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$, $k, l \in \{1, \dots, n\}$ sei $A_{\# k,l} \in \mathrm{Mat}_K((n-1) \times (n-1))$ die Matrix, die wir aus A erhalten, indem wir Zeile k und Spalte l streichen.

(i) Entwicklung nach Zeile k:

$$\det(A) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{kl} \cdot \det(A_{\# k,l})$$

(ii) Entwicklung nach Spalte l:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{kl} \cdot \det(A_{\# k l})$$

Bsp: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) Entwicklung nach Zeile 1.

$$\det(A) = +1 \cdot \det\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cancel{- 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}} + 8 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Entwicklung nach Spalte 2:

$$\det(A) = -0 \cdot \det A_{\# 1,2} + 7 \det A_{\# 2,2} - 0 \cdot \det A_{\# 3,2}$$

$$= 7 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 7 \cdot (-2 - (-8)) = 42$$

Vorzeichen $(-1)^{k+l}$ ergeben Schachbrettmuster

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Beweis Entwicklungssatz 8.9:

$$\det \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & B & \\ * & & & \end{array}\right) = \det(B)$$

(folgt z.B. aus Leibnizformel [...]).

Damit lässt sich (i) direkt nachrechnen:

$A = (a_{ij})_{ij}$, $\underline{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} ; \quad \underline{a}_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \underline{e}_j$$

Standard-Zeilenvektoren

$$\underset{(D3)}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_{k-1} \\ \underline{e}_j \\ \underline{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{Zeile } k$$

Tausche k-mal Zeilen

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k} a_{kj} \cdot \det \begin{pmatrix} e_j \\ a_1 \\ \vdots \\ \cancel{a_k} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Tausche j-mal Spalten

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & A_{\# kj} & \\ * & & & \end{pmatrix}}_{\det(A_{\# kj})}$$

Spalte j von A (außer a_{kj})

Teil (ii) analog. $\square$

8.10 Def: $A \in \mathrm{Mat}_K(n\times n)$, $A_{\#k,l}$ wie in Satz 8.9.

Die **Adjungierte** $A^\# \in \mathrm{Mat}_K(n\times n)$ ist

$$A^\# := \left((-1)^{i+j}\cdot \det(A_{\#j,i})\right)_{i,j}$$

8.11 Satz: Für jedes $A \in \mathrm{Mat}_K(n\times n)$ ist

$$A\cdot A^\# = A^\#\cdot A = \det(A)\cdot \mathbb{1}_n$$

8.12 Korollar: Für jede invertierbare Matrix A gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\cdot A^\#$$

Beispiel:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist invertierbar $\iff ad-bc \neq 0$, und dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale tauschen, Nebendiagonale negieren, und Determinante nicht vergessen.

Beweis zu Satz 8.11:

$A = (a_{ij})_{ij}$,

$A^{\#} = (a^{\#}_{ij})_{ij}$ mit $a^{\#}_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{\# ji})$

Fixiere Zeile k, Spalte l von $A \cdot A^{\#}$. Der Koeffizienten $[A \cdot A^{\#}]_{k,l}$ von $A \cdot A^{\#}$ an dieser Stelle ist

$$[A \cdot A^{\#}]_{k,l} = \sum_j a_{kj} \cdot a^{\#}_{jl}$$
$$= \underbrace{\sum_j a_{kj} \cdot (-1)^{j+l} \det(A_{\# lj})}_{(*)}$$

Für $k = l$ ergibt sich

$$[A \cdot A^{\#}]_{l,l} = \sum_j a_{lj} \cdot (-1)^{j+l} \det(A_{\# lj}).$$
$$\underset{\substack{\text{Laplace } 8.10 \\ (i)}}{=} \det(A)$$

Für $k \neq l$ hängt $(*)$ offenbar nicht von Zeile l von A ab (denn die Koeffizienten a_{kj} stammen aus Zeile k, und in $A_{\# l,j}$ ist Zeile l gestrichen). Also können wir A in $(*)$ durch die Matrix $\tilde{A}$ ersetzen, die aus A hervorgeht, indem wir Zeile l durch Zeile k ersetzen. Dann ergibt sich:

$$[A\cdot A^{\#}]_{k,l} = \sum_j \tilde{a}_{kj}\cdot(-1)^{j+l}\det(\tilde{A}_{\# lj})$$

$$= \sum_j \overset{\shortparallel}{\tilde{a}}_{lj}\cdot(-1)^{j+l}\det(\tilde{A}_{\# lj})$$

$$\underset{\text{Laplace 8.10 (i)}}{=} \det(\tilde{A}) = 0$$

$\tilde{A}$ hat zwei gleiche Zeilen

Insgesamt erhalten wir also:

$$A\cdot A^{\#} = \det A\cdot \mathbb{1}_n$$

$\square$